小阪入試 20 年度（1 次: 2020.1.16）

以下の問題を解答せよ。（裏面使用可）
なお、解答には途中の計算も省略せずに書くこと。

I. 次の式を因数分解せよ。。

(1) $x^2+(a+1)x+a$

(2) $x(x-1)+(x-2)(x-3)-14$

(3) $\dfrac{x^2-5x+3}{3}+\dfrac{x+1}{4}$

(4) x^3+x^2+x+1

(5) x^3+x^2+x-3

II. $a \geq 0$ に対して、

$$f(a)=(a\sqrt{a}-1)^2-(a-1)^3-2(a-1)^2$$

とする。

(1) $f(a)$ を整理し、最も簡潔な形に直せ。

(2) $f(a)=0$ が成り立つための a の値を求めよ。

III. 直角三角形 $\triangle ABC$ $(\angle C=\angle R)$ において、$BC=9, \tan\angle B=\sqrt{5}$ とする。

(1) AC の長さを求めよ。

(2) AB の長さを求めよ。

(3) B, C を通る直線と、A を通り AB と直交する直線との交点を D とするとき、BD の長さを求めよ。

解答

I. 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2+(a+1)x+a=(x+a)(x+1)$

(2) $x(x-1)+(x-2)(x-3)-14=2x^2-6x-8=2(x^2-3x-4)=2(x-4)(x+1)$

(3) $\dfrac{x^2-5x+3}{3}+\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{1}{12}(4x^2-17x+15)=\dfrac{1}{12}(4x-5)(x-3)$

(4) $x^3+x^2+x+1=x^2(x+1)+(x+1)=(x+1)(x^2+1)$

(5) $f(x)=x^3+x^2+x-3$ において、$x=1$ とすると、$f(1)=0$ となるので、$f(x)$ は $x-1$ を因数に持つことがわかり、$x^3+x^2+x-3=(x-1)(x^2+2x+3)$

II.

(1)
$$\begin{aligned} f(a) &= (a\sqrt{a}-1)^2-(a-1)^3-2(a-1)^2 \\ &= a^3-2a\sqrt{a}+1-(a^3-3a^2+3a-1)-(2a^2-4a+2) \\ &= -2a\sqrt{a}+a^2+a=a(a-2\sqrt{a}+1)=a(\sqrt{a}-1)^2. \end{aligned}$$

(2) (1) より、$f(a)=0 \iff a=0,1$

III. $BC=9,\ \tan\angle B=\sqrt{5}$ に注意する。

(1) $AC=BC\tan\angle B=9\sqrt{5}$

(2) $AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{81+81\times 5}=9\sqrt{6}$

(3) $\angle CAD=\angle B$ に注意して、$CD=AC\tan\angle B=9\sqrt{5}\times\sqrt{5}=45$
従って、$BD=BC+CD=9+45=54$