小阪入試 20 年度（2 次: 2020.2.21）

以下の問題を解答せよ。（裏面使用可）
なお、解答には途中の計算も省略せずに書くこと。

I. 次の式を簡単にせよ。

(1) $(6a^2b^3)^4 \div (\frac{24}{5}b^5c)^3 \times 32ab^5c^4$

(2) $(x-1)(x^2+2x+3)-(5-2x)(x^2+1)+(4x+1)(x-1)$

(3) $\dfrac{2x-7}{135}-\dfrac{3x-11}{225}$

II. 次の不等式が成立する点 (x,y) の範囲を xy 平面上に図示せよ。

(1) $y \geq x$

(2) $y \geq 2x-1$

(3) $(x-1)(x-y) \geq 0$

(4) $y \geq x^2-1$ かつ $y \leq x+1$

III. 点 $P(3,18)$ を通り、傾きが 6 の直線を L とする。

(1) 直線 L の方程式を求めよ。

(2) 正数 a,b を $a<b$ で $a+b=6$ を満たすようにとる。このとき、直線 L, $x=a$, $x=b$ と x 軸で囲まれた台形の面積 S を求めよ。

(3) a,b,S を (2) と同様としたとき、$\dfrac{a+b}{2}=3$ を利用して、

$$\frac{1}{3}(b^3-a^3) \geq S-9(b-a)$$

が成り立つことを確かめよ。

解答

I. 次の式を簡単にせよ。

(1) $(6a^2b^3)^4 \div (\frac{24}{5}b^5c)^3 \times 32ab^5c^4 = \dfrac{2^4 3^4 a^8 b^{12} \times 5^3 \times 2^5 ab^5c^4}{2^9 3^3 b^{15} c^3} = 375a^9b^2c$

(2) $(x-1)(x^2+2x+3)-(5-2x)(x^2+1)+(4x+1)(x-1)$
$= x^3+x^2+x-3+2x^3-5x^2+2x-5+4x^2-3x-1 = 3x^3-9$

(3) $\dfrac{2x-7}{135} - \dfrac{3x-11}{225} = \dfrac{1}{45}\left(\dfrac{2x-7}{3} - \dfrac{3x-11}{5}\right) = \dfrac{1}{45}\left(\dfrac{5(2x-7)-3(3x-11)}{15}\right)$
$= \dfrac{1}{45\times 15}(x-2) = \dfrac{x-2}{675}$

II. 次の不等式が成立する点 (x, y) の範囲を xy 平面上に図示せよ。

(1) $y \geq x$ の成立範囲は、直線 $y = x$ の上側（直線状を含む）となる。

(2) $y \geq 2x-1$ の成立範囲は、直線 $y = 2x-1$ の上側（直線状を含む）となる。

(3) (i) $x-1 \geq 0$ かつ　$x-y \geq 0$ あるいは　(ii) $x-1 \leq 0$ かつ　$x-y \leq 0$ のいずれかの場合に分けられる。(i) $x \geq 1$ かつ　$y \leq x$, (ii) $x \leq 1$ かつ　$y \geq x$ と言い換えられる。従って、2 つの直線 (a) $x = 1$, (b) $y = x$ を描き、
(i) $\Leftrightarrow$ (a) の右側かつ (b) の下側；　(ii) $\Leftrightarrow$ (a) の左側かつ (b) の上側
を図示すればよい。

(4) $y = x^2-1$ と $y = x+1$ の交点を求める。$x^2-1 = x+1$ を解けばよいので、$0 = x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$ より、$x = -1, 2$; 従って、交点は、$(-1, 0)$, $(2, 3)$ である。成立範囲は、直線 $y = x+1$ と $y = x^2-1$ によって囲まれた部分となる。

III.

(1) $y-18 = 6(x-3)$ 整理すると、$y = 6x$

(2) $S = \dfrac{1}{2}(6a+6b)(b-a) = 3(a+b)(b-a) = 18(b-a)$

(3) まず、相加相乗平均の不等式より、$\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2} = 3$ より、$ab \leq 9$ なので、

$$a^2+ab+b^2 = (a+b)^2-ab = 36-ab \geq 36-9 = 27.$$

また、(2) より $S = 18(b-a)$ なので、右辺 $= S-9(b-a) = 9(b-a)$ である。従って、

$$\text{左辺} - \text{右辺} = \frac{1}{3}(b^3-a^3)-9(b-a) = \frac{1}{3}(b-a)\{(a^2+ab+b^2)-27\} \geq 0.$$

(別解)

$$\text{左辺} - \text{右辺} = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - 9(b-a) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (b-a)$$

$$= \frac{1}{12}(b-a)\{4(a^2 + ab + b^2) - 3(a+b)^2\} = \frac{1}{12}(b-a)(a-b)^2 \geq 0$$